426. Určité množstvo vzduchu sme nechali rozopnúť zo začiatočného objemu $V_0 = 2$ l na päťnásobný. Začiatočný tlak vzduchu $p_0 = 0,1$ MPa. Vypočítajte, akú prácu sme získali, keď sa expanzia uskutočnila a) izobaricky, b) izotermicky, c) adiabaticky.

$V_0 = 2$ l
$V_1 = 5V_0$
$p_0 = 0{,}1$ MPa
$A = ?$ J

a) Izobaricky dej. Pri izobarickom deji je tlak konštantný, platí preň rovnica

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1} = K_p$$

kde K_p je konštanta. Pre objemovú prácu platí vzťah

$$A = \int_{V_0}^{V_1} p \, \mathrm{d}V$$

Keďže tlak sa nemení pri zmene objemu a teploty, výsledkom integrovania bude vzťah

$$A = p \left[V\right]_{V_0}^{V_1} = p_0(V_1 - V_0) = 4p_0V_0$$

b) Izotermický dej. Pri izotermickom deji je z jeho definície teplota T konštantná, meniť sa môže len tlak a objem. Pre izotermický dej vyplýva so stavovej rovnice platnosť vzťahu

$$p_0V_0 = pV = K_T \tag{1}$$

kde K_T je konštanta.

Pre elementárnu objemovú prácu vykonanú plynom platí vzťah

$$\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V$$

odkiaľ je možné vypočítať celkovú objemovú prácu integrovaním

$$A = \int_{V_0}^{V_1} p \, \mathrm{d}V \tag{2}$$

kde V_0 je začiatočný objem, V_1 je konečný objem. Pri izotermickom deji sa však mení tlak v závisloti od zmeny objemu. Využitím (1) platí pre tlak funkcia

$$p = \frac{V_0}{V} p_0$$

Pre prácu vo vzťahu (2) je potom možné písať

$$A = \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{V_0}{V} p_0 \mathrm{d}V = p_0 V_0 \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_0 V_0 \left[\ln V\right]_{V_0}^{V_1} = p_0 V_0 (\ln V_1 - \ln V_0) = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0}$$

Využitím zadaných pomerov hraničných objemov je možné pre prácu písať

$$A = p_0 V_0 \ln 5$$

c) Adiabatický dej. Pri adiabatickom deji je plyn tepelne izolovaný od okolia a platí Poissonova rovnica v tvare

$$p_0 V_0^\kappa = p V^\kappa = K_a$$

kde K_a je konštanta. Číslo κ sa nazýva Poissonova alebo adiabatická konštanta, pre vzduch má hodnotu 1,4. Pre tlak je možné písať

$$p = \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa p_0$$

Vzťah pre prácu vykonanú pri adiabatickom deji sa potom získa integrovaním

$$A = \int\limits_{V_0}^{V_1} p \, \mathrm{d}V = \int\limits_{V_0}^{V_1} \left(\frac{V_0}{V}\right)^\kappa p_0 \mathrm{d}V = p_0 V_0^\kappa \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V^\kappa} = p_0 V_0^\kappa \left[\frac{V^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right]_{V_1}^{V_0} = \frac{p_0 V_0^\kappa}{1-\kappa} (V_1^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa})$$

Využitím zadaného vzťahu začiatočného a koncového objemu

$$A = \frac{p_0 V_0^\kappa}{1-\kappa} (5^{1-\kappa} V_0^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}) = \frac{p_0 V_0}{1-\kappa} (5^{1-\kappa} - 1^{1-\kappa}) = \frac{p_0 V_0}{1-\kappa} (5^{1-\kappa} - 1)$$

Po dosadení zadaných číselných hodnôt vychádza

a) $A = 800$ J

b) $A = 322$ J

c) $A = 237$ J