420. Kompresor nasáva atmosferický vzduch s tlakom 0,1 MPa a teplotou 27 °C a stláča ho pri stálej teplote na tlak 3,5 MPa. Vypočítajte, koľko tepla sa odvádza chladiacej vode za hodinu, keď za tento čas sa stlačí 10 kg vzduchu.

$p_0 = 0{,}1$ MPa
$p_1 = 3{,}5$ MPa
$t_0 = t_1 = 27$ °C
$m = 10$ kg
$Q =?$ J (resp. J.hod^{-1})

Kompresor k tomu, aby stlačil za hodinu zadané množstvo vzduchu na požadovaný tlak, musí vykonať istú prácu. Energia spotrebovaná na takéto stlačenie sa odvedie vo forme tepla chladiacej vode. V tomto príklade vystupuje izotermický dej, pri ktorom je konštantná teplota. Preň zo stavovej rovnice ideálneho plynu vyplýva vzťah

$$p_0 V_0 = pV = C \tag{1}$$

kde C je konštanta.

Pre elementárnu prácu vykonanú plynom platí

$$\mathrm{d}A = p\,\mathrm{d}V$$

Celková práca sa potom získa integrovaním

$$A = \int\limits_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V \tag{2}$$

kde V_0 je začiatočný objem, V_1 je konečný objem. Pri izotermickom deji sa však mení tlak v závisloti od zmeny objemu. Využitím (1) platí pre tlak funkcia

$$p = \frac{V_0}{V} p_0$$

Pre prácu vo vzťahu (2) je potom možné písať

$$A = \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{V_0}{V} p_0 \mathrm{d}V = p_0 V_0 \int\limits_{V_0}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_0 V_0 \left[\ln V\right]_{V_0}^{V_1} = p_0 V_0 (\ln V_1 - \ln V_0) = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0} \tag{3}$$

Ďalej pre zadané množstvo stlačeného vzduchu platí stavová rovnica ideálneho plynu v tvare

$$pV = nRT \tag{4}$$

kde n je látkové množstvo zadaného množstva vzduchu. Pre teplo (resp. prácu) spotrebované (resp. odovzdané) pri izotermickom deji platí vzťah (3). Keďže platí vzťah (1), možno pre teplo odovzdané pri tomto izotermickom deji písať

$$Q = p_0 V_0 \ln \frac{p_0}{p_1} \tag{5}$$

Vo vzťahu (5) nie je známy objem vzduchu hmotnosti m pri tlaku p_0, ktorý bol neskôr kompresorom stlačený. Na vyjadrenie objemu V_0 je možné využiť stavovú rovnicu ideálneho plynu v tvare (4).

$$V_0 = \frac{nRT}{p_0}$$

Pre látkové množstvo vzduchu hmotnosti m platí

$$n = \frac{m}{M_{mv}}$$

kde M_{mv} je hmotnosť 1 mólu vzduchu. Pre riešenie tohoto príkladu stačí, keď sa za vzduch zoberie predstava plynnej zmesi dvojatómových molekúl dusíka (78% zmesi) a dvojatómových molekúl kyslíka (21% zmesi). Potom pre molové množstvo vzduchu hmotnosti m možno písať

$$n = \frac{m}{M_{mol\,\mathrm{O_2}} + M_{mol\,\mathrm{N_2}}} = \frac{m}{2M_{mol\,\mathrm{O}} + 2M_{mol\,\mathrm{N}}}$$

Pre termodynamickú teplotu platí vzťah

$$T = T_0 + t$$

Pre objem V_0 teda platí

$$V_0 = \frac{mR(T_0 + t)}{(2M_{mol\,\mathrm{O}} + 2M_{mol\,\mathrm{N}})p_0}$$

Dosadením tohoto vzťahu do vzťahu (5) vyjde pre teplo vzťah

$$Q = \frac{mR(T_0 + t)}{2M_{mol\,\mathrm{O}} + 2M_{mol\,\mathrm{N}}} \ln \frac{p_0}{p_1}$$

Dosadením zadaných číselných hodnôt a tabuľkových konštánt ($T_0 = 273$ K, $M_{mol\,\mathrm{O}} = 16.10^{-3}$ kg, $M_{mol\,\mathrm{N}} = 14{,}008.10^{-3}$ kg) vyjde pre hľadané množstvo tepla hodnota

$$Q = -3{,}1.10^6 \text{ J}$$

Záporné znamienko znamená, že práca sa pri konaní izotermického deja nezískava, ale spotrebováva. Číselne teda $Q = 3{,}1$ MJ.